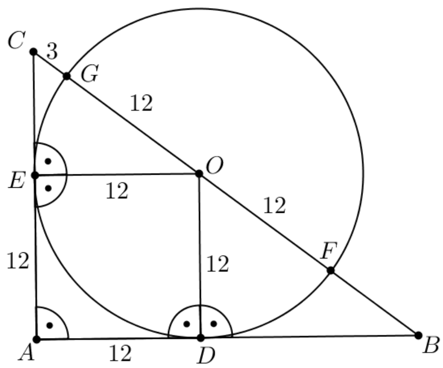
WOJEWÓDZKI KONKURS PRZEDMIOTOWY Z MATEMATYKI DLA UCZNIÓW GIMNAZJÓW WOJEWÓDZTWA KUJAWSKO-POMORSKIEGO

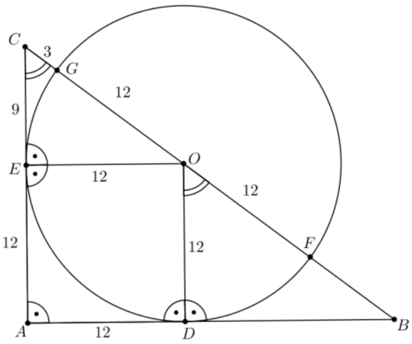
Klucz odpowiedzi z rozwiązaniami, etap wojewódzki,

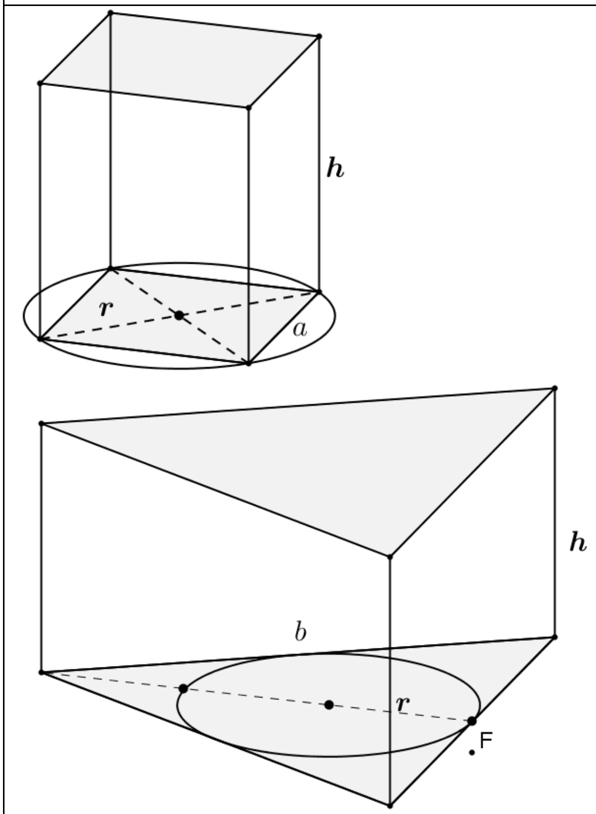
Uwaga. Jeżeli uczeń poprawnie rozwiązał zadanie metodą inną niż podana w schemacie rozwiązania otrzymuje maksymalną liczbę punktów za to zadanie.

Część 1

Zadanie 1 (za 6 punktów)	**Pkt**	**Punkty za:**
Wprowadźmy oznaczenia: w - liczba wszystkich kul w pudełku, b - liczba kul białych, z - liczba kul zielonych n - liczba kul białych, c - liczba kul białych. Z treści wiemy, że: $b = w - 25$ $z = w - 25$ $n = w - 25$ $c = w - 36$	1	Opisanie zależności między liczbami kul o poszczególnych kolorach, a liczbą wszystkich kul.
Po dodaniu stronami powyższych równości otrzymujemy: $b + z + n + c = 4w - 111$	1	Zauważenie jednej z zależności między sumą liczb kul w poszczególnych kolorach a liczbą wszystkich kul.
Ponieważ w pudełku są tylko kule białe, zielone niebieski i czarne, więc $b + z + n + c = w$	1	Zauważenie drugiej z zależności między sumą liczb kul w poszczególnych kolorach a liczbą wszystkich kul.
Zatem: $w = 4w - 111$ $-3w = -111$ $w = 37$	1	Obliczenie liczby wszystkich kul.
Stąd: $c = 37 - 36 = 1$	1	Obliczenie liczby kul czarnych.

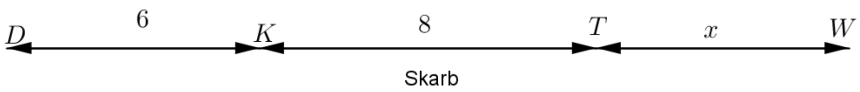
Wszystkich kul jest zatem 37, w tym jedna z nich jest czarna. Wynika stąd, że prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej jest równe: $p = \frac{1}{37}$	1	Obliczenie prawdopodobieństwa wylosowania kuli czarnej.
Odpowiedź: Prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej jest równe $\frac{1}{37}$.		
Zadanie 2 (za 8 punktów)	**Pkt**	**Punkty za:**
Promienie okręgu OD i OE łączą środek okręgu z punktami styczności D i E więc są **prostopadłe** do odpowiednich boków stycznych AB i AC.	1	Rysunek z promieniami poprowadzonymi do punktów styczności i **zaznaczeniem kątów prostych** między tymi promieniami, a odpowiednimi bokami w punktach styczności.
Wobec tego czworokąt $ADOE$ jest kwadratem o boku tej samej długości, co promień okręgu. Promień okręgu ma z założenia długość 12, a więc odcinki AD i AE są także długości 12.  	1	Zauważenie, że odcinki AD i AE mają długość 12.
Długość odcinka CG jest z założenia równa 3, więc możemy obliczyć długość odcinka CO: $$\|OC\| = \|OG\| + \|CG\|.$$ $$\|OC\| = 12 + 3 = 15.$$ $$\|OC\| = 15.$$	1	Obliczenie długości odcinka OC.
Stosując tw. Pitagorasa do trójkąta prostokątnego EOC możemy obliczyć długość odcinka CE: $\|CE\|^2 = \|OC\|^2 - \|OE\|^2$ $\|CE\|^2 = 15^2 - 12^2$	1	Obliczenie długości odcinka CE.

$\vert CE\vert^2 = 81$ $\vert CE\vert = 9$		
Odcinki CA i DO są do siebie równoległe gdyż są one prostopadłe do tego samego odcinka AB.  Wobec tego kąty odpowiadające ECO oraz DOB są tej samej miary. Zatem **trójkąty ECO oraz DOB są podobne.** gdyż oba są prostokątne i mają odpowiadające kąty ostre o tej samej mierze.	1	Zauważenie i uzasadnienie, że trójkąty ECO i DOB są podobne.
Z podobieństwa trójkątów ECO i DOB wynika, że stosunki odpowiednich boków w tych trójkątach są równe, a zatem: $$\frac{\vert OB\vert}{\vert OD\vert} = \frac{\vert OC\vert}{\vert CE\vert}$$ $$\frac{\vert OB\vert}{12} = \frac{15}{9}$$ $$\vert OB\vert = 20$$	1	Wyznaczenie długości odcinka OB.
Możemy teraz policzyć długość odcinka BF: $$\vert BF\vert = \vert OB\vert - \vert OF\vert$$ $$\vert BF\vert = 20 - 12$$ $$\vert BF\vert = 8$$	1	Wyznaczenie długości odcinka BF.
Odpowiedź: Długość odcinka BF jest równa 8.	1	Bezbłędne rachunki

Zadanie 3 (za 8 punktów)	**Pkt**	**Punkty za:**
Wprowadźmy oznaczenia: a – długość boku kwadratu, który jest podstawą pierwszego graniastosłupa b - długość boku trójkąta równobocznego, który jest podstawą drugiego graniastosłupa h_p - długość wysokości trójkąta równobocznego, który jest podstawą drugiego graniastosłupa h - długość wysokości graniastosłupów P_1 – pole powierzchni całkowitej pierwszego graniastosłupa P_2 – pole powierzchni całkowitej drugiego graniastosłupa		
		
Jeśli kwadrat o boku a jest wpisany w okrąg o promieniu r to $a = r\sqrt{2}$. Wiemy, że $r = 1$, więc $a = \sqrt{2}$.	1	Wyznaczenie długości boku kwadratu będącego podstawą pierwszego graniastosłupa.
Jeśli trójkąt równoboczny o boku b jest opisany na okręgu o promieniu r to wysokość tego trójkąta jest równa $3r$: $h_p = 3r$ Wiemy, że $r = 1$, więc	1	Wyznaczenie długości wysokości trójkąta równobocznego będącego podstawą drugiego graniastosłupa.

$h_p = 3$		
Stosując wzór na wysokość trójkąta równobocznego o boku b możemy policzyć długość jego boku: $\frac{b\sqrt{3}}{2} = 3 \qquad /\cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$ $b = \frac{6}{\sqrt{3}}$ $b = \frac{6\sqrt{3}}{3}$ $b = 2\sqrt{3}$	1	Wyznaczenie długości boku trójkąta równobocznego będącego podstawą drugiego graniastosłupa. (Ne jest wymagane usunięcie niewymierności z mianownika ułamka.)
Pole P_1 powierzchni całkowitej pierwszego graniastosłupa jest sumą pól dwóch podstaw będących kwadratami o boku długości a oraz czterech ścian bocznych będących prostokątami o wymiarach a i h: $P_1 = 2a^2 + 4ah$ $P_1 = 2\sqrt{2}^2 + 4\sqrt{2} \cdot h$ $P_1 = 4 + 4\sqrt{2} \cdot h$	1	Zapisanie pola powierzchni całkowitej pierwszego graniastosłupa w postaci wyrażenia algebraicznego, w którym zmienną jest wysokość graniastosłupa.
Pole P_2 powierzchni całkowitej drugiego graniastosłupa jest sumą pól dwóch podstaw będących trójkątami równobocznymi o boku długości b oraz trzech ścian bocznych będących prostokątami o wymiarach b i h: $P_2 = 2 \cdot \frac{b^2\sqrt{3}}{4} + 3bh$ $P_2 = 2 \cdot \frac{(2\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot 2\sqrt{3} \cdot h$ $P_2 = 6\sqrt{3} + 6\sqrt{3} \cdot h$	1	Zapisanie pola powierzchni całkowitej drugiego graniastosłupa w postaci wyrażenia algebraicznego, w którym zmienną jest wysokość graniastosłupa.

Pole powierzchni całkowitej drugiego graniastosłupa ma być 2 razy większe niż pole powierzchni całkowitej pierwszego graniastosłupa, więc: $2P_1 = P_2$ $2(4 + 4\sqrt{2} \cdot h) = 6\sqrt{3} + 6\sqrt{3} \cdot h$	1	Zapisanie równania, z niewiadomą wysokością
$8 + 8\sqrt{2} \cdot h = 6\sqrt{3} + 6\sqrt{3} \cdot h$ $8\sqrt{2} \cdot h - 6\sqrt{3} \cdot h = 6\sqrt{3} - 8$ $h \cdot (8\sqrt{2} - 6\sqrt{3}) = 6\sqrt{3} - 8$ $h = \frac{6\sqrt{3} - 8}{8\sqrt{2} - 6\sqrt{3}}$ $h = \frac{3\sqrt{3} - 4}{4\sqrt{2} - 3\sqrt{3}}$ $h = \frac{3\sqrt{3} - 4}{4\sqrt{2} - 3\sqrt{3}}$ $h = \frac{(3\sqrt{3} - 4) \cdot (4\sqrt{2} + 3\sqrt{3})}{(4\sqrt{2} - 3\sqrt{3}) \cdot (4\sqrt{2} + 3\sqrt{3})}$ $h = \frac{(3\sqrt{3} - 4) \cdot (4\sqrt{2} + 3\sqrt{3})}{32 - 27}$ $h = \frac{12\sqrt{6} - 12\sqrt{3} - 16\sqrt{2} + 27}{5}$	1	Poprawne wyznaczenie wysokości (w dowolnej postaci). Nie wymaga się usunięcia niewymierności z mianownika ułamka.
Odpowiedź: Graniastosłupy powinny mieć wysokość $\frac{12\sqrt{6} - 12\sqrt{3} - 16\sqrt{2} + 27}{5}$.	1	Bezbłędne rachunki.

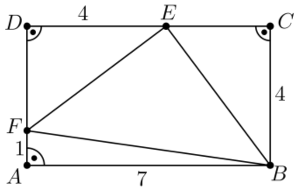
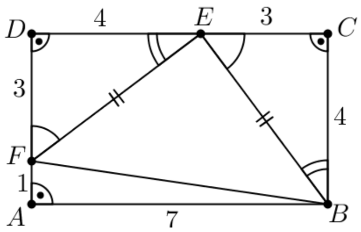
<table>
<tr><th>Zadanie 4 (za 8 punktów)</th><th>Pkt</th><th>Punkty za:</th></tr>
<tr><td>Niech x oznacza odległość topoli od wierzby. Wtedy długość całej drogi wynosi $14 + x$.
</td><td>1</td><td>Wrowadzenie odpowiednich oznaczeń na rysunku.</td></tr>
<tr><td>Pierwsza instrukcja każe oddalić się od dębu na odległość:
$$s_1 = \frac{1}{2} \cdot |DT| = \frac{1}{2} \cdot (6 + 8) = 7$$</td><td>1</td><td>Zapisanie, w jakiej odległości od dębu znajdzie się poszukiwacz skarbu po wykonaniu pierwszej instrukcji.</td></tr>
<tr><td>Po wykonaniu drugiej instrukcji poszukiwacz skarbu oddali się od dębu na odległość: $s_2 = 7 + \frac{1}{3} \cdot (7 + x)$</td><td>1</td><td>Zapisanie, w jakiej odległości od dębu znajdzie się poszukiwacz skarbu po wykonaniu drugiej instrukcji.</td></tr>
<tr><td>Po wykonaniu trzeciej instrukcji odległość od dębu będzie wynosić.
$$s_3 = 7 + \frac{1}{3} \cdot (7 + x) - \frac{1}{4}\left(7 + \frac{1}{3} \cdot (7 + x) - 6\right)$$
$$s_3 = 7 + \frac{1}{3} \cdot (7 + x) - \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{3} \cdot (7 + x)\right)$$
$$s_3 = 7 + \frac{7}{3} + \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}\left(1 + \frac{7}{3} + \frac{1}{3}x\right)$$
$$s_3 = 7 + \frac{7}{3} + \frac{1}{3}x - \frac{1}{4} - \frac{7}{12} - \frac{1}{12}x$$
$$s_3 = \frac{1}{12} \cdot (84 + 28 + 4x - 3 - 7 - x)$$
$$s_3 = \frac{1}{12} \cdot (102 + 3x)$$
$$s_3 = \frac{1}{4} \cdot (34 + x)$$</td><td>1</td><td>Zapisanie, w jakiej odległości od dębu znajdzie się poszukiwacz skarbu po wykonaniu drugiej instrukcji.</td></tr>
</table>

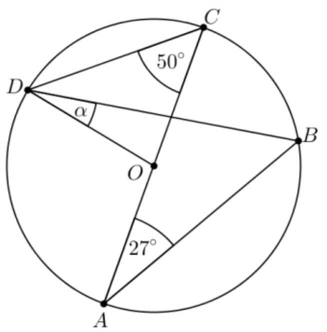
Z drugiej strony skarb jest w połowie drogi a więc w miejscu, którego odległość od dębu jest równa $\frac{1}{2}\cdot(14+x)$, a więc:	1	Zapisanie odległości od dębu znajduje się skarb.
$\frac{1}{4}\cdot(34+x)=\frac{1}{2}\cdot(14+x)$ $34+x=28+2x$	1	Zapisanie równania, z którego można pośrednio lub bezpośrednio odległość między wierzbą a topolą.
$x=6$	1	Bezbłędny wynik
Odpowiedź: Topola rośnie w odległości 6 kilometrów od wierzby.	1	Wyznaczenie odległości między wierzbą, a topolą.

Część 2

Zadanie	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Odpowiedź	0	2^5	5	45°	$\frac{2+\sqrt{2}}{3}$	7	23°	a	100	10

Treść zadania:	Rozwiązanie:	Odpowiedź:
Zadanie 1. Ile wynosi cyfra setek w zapisie dziesiętnym liczby będącej wynikiem działania 2015^2-2014^2?	▪ $2015^2-2014^2=(2015+2014)(2015-2014)$ ▪ $2015^2-2014^2=4029\cdot 1$ ▪ $2015^2-2014^2=4029$	0
Zadanie 2. Ile razy należy dodawać składnik 3^5, aby otrzymać w sumie wynik 6^5?	▪ $6^5=2^5\cdot 3^5=\underbrace{3^5+3^5+\dots+3^5}_{2^5\text{ składników}}$	2^5
Zadanie 3. Ile wierzchołków ma wielokąt foremny, który nie ma środka symetrii, a liczba jego osi symetrii jest dzielnikiem liczby 40?	Liczba wierzchołków tego wielokąta foremnego jest: ▪ nieparzysta (bo wielokąt ten nie ma środka symetrii), ▪ jest dzielnikiem liczby 40 (bo liczba osi symetrii jest taka sama jak liczba wierzchołków). ▪ jest niemniejsza niż 3. Jedynym nieparzystym dzielnikiem liczby 40 niemniejszym niż 3 jest 5.	5

Treść zadania:	Rozwiązanie:	Odpowiedź:
Zadanie 4. Jaką miarę ma kąt EBF ?  	Z danych na rysunku wynika, że $\|EC\| = 3$ oraz $\|DF\| = 3$. Zatem trójkąty FDE i ECB są przystające bo oba są prostokątne i mają przyprostokątne tej samej długości 3 oraz 4. Stąd $\|FE\| = \|EB\|$ oraz $\|\angle DEF\| + \|\angle CEB\| = 90°$.  W takim razie trójkąt FEB jest trójkątem prostokątnym równoramiennym i $\|\angle EBF\| = 45°$.	$45°$
Zadanie 5. Ile wynosi średnia arytmetyczna długości wszystkich boków i przekątnych kwadratu o wymiarach 1×1?	Wszystkich odcinków łączących wierzchołki kwadratu jest 6 i są to 4 boki i długości 1 i dwie przekątne o długości $\sqrt{2}$. I średnia wynosi zatem: $\frac{1+1+1+1+\sqrt{2}+\sqrt{2}}{6} = \frac{4+2\sqrt{2}}{6} = \frac{2+\sqrt{2}}{3}$	$\frac{2+\sqrt{2}}{3}$
Zadanie 6. Suma 7 kolejnych liczb naturalnych jest równa 7^2. Ile wynosi mediana tych liczb?	Niech m oznacza szukaną medianę. $(m-3)+(m-2)+(m-1)+m+(m+1)+(m+2)+(m+3) = 7^2$ $7m = 7^2$ $m = 7$	7

Treść zadania:	Rozwiązanie:	Odpowiedź:
Zadanie 7. Punkty A, B, C, D leżą na okręgu o środku O. Korzystając z dodatkowych danych na rysunku oblicz miarę kąta α. 	▪ Kąty wpisane oparte na tym samym łuku BC są przystające, więc $\|\measuredangle BDC\| = \|\measuredangle BAC\| = 27°$. ▪ Trójkąt CDO jest równoramienny gdyż boki OD i OC są promieniami okręgu ($\|OD\| = \|OC\|$. Stąd $\|\measuredangle ODC\| = \|\measuredangle OCD\| = 50°$ ▪ $\alpha = 50° - 27° = 23°$	23°
Zadanie 8. Dane są liczby: $a = 2015 + \frac{1}{2015}$ oraz $b = 2015 + \frac{1}{2015+\frac{1}{2015}}$? Która z nich jest większa?	▪ Wystarczy zauważyć, że ułamek $\frac{1}{2015}$ jest większy od ułamka $\frac{1}{2015+\frac{1}{2015}}$ gdyż oba ułamki mają taki sam licznik ale pierwszy z nich ma mniejszy mianownik.	a
Zadanie 9. Ile wierzchołków ma w podstawie graniastosłup, w którym liczba wszystkich wierzchołków, krawędzi i ścian, jest równa 602?	▪ n – liczba wierzchołków podstawy ▪ $2n$ – liczba wierzchołków ▪ $3n$ – liczba krawędzi ▪ $n + 2$ – liczba ścian ▪ $2n + 3n + n + 2 = 602$ ▪ $6n + 2 = 602$ ▪ $n = 100$	100
Zadanie 10. Funkcja f jest funkcją liniową oraz $f(7) - f6) = 5$. Ile wynosi $f(5) - f(3)$?	Funkcję liniową możemy zapisać za pomocą wzoru $f(x) = ax + b$. Wtedy: $f(7) = a \cdot 7 + b = 7a + b$ $f(6) = a \cdot 6 + b = 6a + b$	10

Treść zadania:	Rozwiązanie:	Odpowiedź:
	Równość: $f(7) - f(6) = 5$ Możemy zapisać w postaci: $(7a + b) - (6a + b) = 5.$ Po uproszczeniu otrzymujemy, że: $a = 5$ Zatem wzór funkcji f przybiera postać: $f(x) = 5x + b$ W takim razie: $f(5) = 5 \cdot 5 + b = 25 + b$ $f(3) = 5 \cdot 3 + b = 15 + b$ oraz $f(5) - f(3) = (25 + b) - (15 + b)$ Po uproszczeniu prawej strony ostatniej równości mamy: $f(5) - f(3) = 10$	