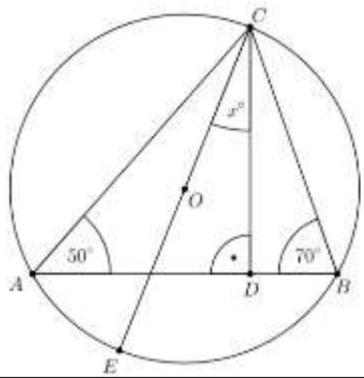
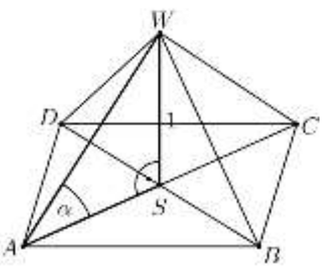
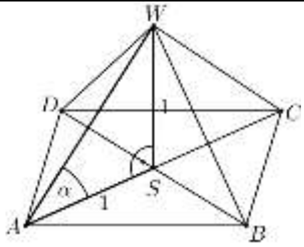
WOJEWÓDZKI KONKURS PRZEDMIOTOWY z MATEMATYKI
DLA UCZNIÓW GIMNAZJÓW
WOJEWÓDZTWA KUJAWSKO-POMORSKIEGO
Arkusz odpowiedzi do zadań z etapu wojewódzkiego, część 2, 10.02.2016

Zadanie	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Odpowiedź	$\frac{2015}{2016}$	1	11	20	b	$\frac{1}{12}$	41	20	45°	125

Treść zadania:	Rozwiązanie:	Odpowiedź:
Zadanie 1. Suma dwóch liczb jest równa 2015, a ich iloczyn wynosi 2016. Ile równa się suma odwrotności tych liczb?	▪ $a + b = 2015$ ▪ $a \cdot b = 2016$ ▪ $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{b+a}{a \cdot b} = \frac{2015}{2016}$	$\frac{2015}{2016}$
Zadanie 2. Liczba n jest najmniejszą liczbą naturalną, której suma cyfr jest równa 2016. Ile wynosi suma cyfr liczby $n + 1$?	Najmniejsza taka liczba musi mieć jak najmniejszą liczbę cyfr, więc cyfry tej liczby muszą być możliwie największe. Największe możliwe cyfry to dziewiątki , a ponieważ suma cyfr 2016 dzieli się przez 9, więc zapis dziesiętny liczby n składa się z samych dziewiątek i stąd zapis dziesiętny liczby n + 1 składa się z cyfry 1 na początku jej zapisu dziesiętnego i samych zer dalej, a więc suma cyfr liczby n + 1 wynosi 1. $n = \quad 999 \ldots 9$ $n + 1 = \quad 1000 \ldots 0$	1
Zadanie 3. Do wykresu funkcji liniowej zadanej wzorem $f(x) = 3x + 1$ należy punkt $A = (a - 3, 2a + 3)$. Oblicz a.	$f(a - 3) = 2a + 3$ $3(a - 3) + 1 = 2a + 3$ $3a - 9 + 1 = 2a + 3$ $a = 11$	11
Zadanie 4. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Korzystając z dodatkowych informacji zamieszczonych na rysunku oblicz x. 	Trójkąt BCD jest prostokątny i zawiera kąt ostry 70°, więc $\lvert \measuredangle BCD \rvert = 20°$. Dorysujmy odcinek EB. Trójkąt EBC jest prostokątny, bo kąt EBC jest wpisany w okrąg i oparty na średnicy. Ponadto w trójkącie EBC kąt przy wierzchołu E ma miarę 50° , bo jest to kąt wpisany w okrąg i oparty na tym samym łuku co kąt BAC o podanej mierze 50°. Stąd w trójkącie EBC kąt przy wierzchołku C ma miarę 40° i stąd kąt ECD ma miarę $40° - 20° = 20°$, a więc $x = 20$.	20

WOJEWÓDZKI KONKURS PRZEDMIOTOWY z MATEMATYKI
DLA UCZNIÓW GIMNAZJÓW
WOJEWÓDZTWA KUJAWSKO-POMORSKIEGO
Arkusz odpowiedzi do zadań z etapu wojewódzkiego, część 2, 10.02.2016

Treść zadania:	Rozwiązanie:	Odpowiedź:
Zadanie 5. Niech $M(x,y)$ większą z liczb x,y, np. $M(3,5) = 5$. Niech $m(x,y)$ mniejszą z liczb x,y, np. $m(3,5) = 3$. Jeśli wiadomo, że liczby a,b,c,d,e spełniają warunek $a<b<c<d<e$, to która z liczb a,b,c,d,e jest równa $M(M(a,m(b,c)),m(d,m(a,e)))$?	$M(M(a,m(b,c)),m(d,m(a,e))) =$ $= M(M(a,b),m(d,a)) = M(b,a) = b$	b
Zadanie 6. Wiadomo, że $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losując jedną liczbę spośród wszystkich liczb naturalnych będących dzielnikami liczby 2016 wylosujemy liczbę pierwszą?	Skoro $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7^1$, to każdy dzielnik natualny liczby 2016 można zapisać w postaci $2^n \cdot 3^k \cdot 7^l$, gdzie $n \epsilon \{0,1,2, 3, 4, 5\}$, $k \epsilon \{0,1, 2\}$, $l \in \{0,1\}$ Niech d oznacza liczbę wszystkich naturalnych dzielników liczby 2016. Wobec powyższego więc $d = 6 \cdot 3 \cdot 2$. Wśród tych dzielników występują trzy liczby pierwsze: 2, 3, 7, więc prawdopodobieństwo p wylosowania dzielnika pierwszego wynosi: $p = \frac{3}{6\cdot3\cdot2} = \frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
Zadanie 7. Figura numer 1 składa się z 5 zapałek, figura numer 2 składa się 9 zapałek, figura numer 3 składa się z 13 zapałek. Z ilu zapałek składa się figura numer 10?	Figura numer 1 a składa się $1 + 1 \cdot 4$ zapałek. Figura numer 2 a składa się $1 + 2 \cdot 4$ zapałek. Figura numer 3 a składa się $1 + 3 \cdot 4$ zapałek. ….. Figura numer 10 a składa się $1 + 10 \cdot 4$ zapałek.	41
Zadanie 8. Symetralne boków pewnego trójkąta ABC przecinają w punkcie P, który jest oddalony od wierzchołka A o 10 cm. Ile wynosi suma odległości punktu P od wierzchołków B, C ?	Punkt przecięcia się symetralnych boków trójkąta jest równo oddalony od wszystkich jego wierzchołków,w tym ptrzypadku o 10 cm. Zatem suma odległości punktu P od dwóch pozostałych wierzchołków wynosi 20.	20
Zadanie 9. Ostrosłup prawidłowy czworokątny o wysokości 1 cm ma podstawę ma polu 2 cm^2. Jaką miarę ma kąt nachylenia krawędzi bocznej tego ostrosłupa do podstawy?	Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.  Niech d oznacza długość przekatnej podstawy w centymetrach. Pole podstawy jest równe 2, więc $\frac{1}{2}d^2 = 2$ i stąd $d^2 = 4$ i $d = 2$.	45°

Treść zadania:	Rozwiązanie:	Odpowiedź:
	 Zatem odcinek łaczący wierzchołek podstawy ze spodkiem S wysokości ostrosłupa ma długość 1 cm. Kąt α nachylenia krawędzi bocznej do podstawy jest jednocześnie kątem ostrym w prostokatnych trójkącie równoramiennym ASD i stąd $\alpha = 45°$.	
Zadanie 10. Cztery krawędzie sześcianu skrócono o 1, cztery wydłużono o 1, a cztery pozostawiono bez zmian tak, że utworzył się prostopadłościan o objętości o 5 mniejszej niż wyjściowy sześcian. Jaka była objętość sześcianu?	Niech a oznacza długość krawędzi sześcianu. Porównując objętość powstałego prostopadłościan z objętością sześcianu otrzymujemy równanie $(a-1)(a+1)a = a^3 - 5$ $(a^2-1)a = a^3 - 5$ $a^3 - a = a^3 - 5$ $a = 5$ $a^3 = 125$	125